+&c.

EMANUELE DELUCCHI, MAURICE D. FROIDCOEUR

Riassunto. Prendendo spunto dalla dimostrazione del teorema dei numeri pentagonali di Euler illustriamo alcune proposte di attività per diversi livelli scolastici.

Abstract. We take Euler's proof of the pentagonal number theorem as a starting point for presenting some classroom acivities aimed at different school levels.

Introduzione

Il nostro piccolo omaggio ad Euler ruota attorno ad un tema ricorrente nella sua opera matematica: il cosiddetto "teorema dei numeri pentagonali". Oltre alla predilezione che Euler stesso mostrò nei confronti dei numeri pentagonali, siamo stati spinti a considerare questo argomento per i tanti spunti che offre: dai bastoncini di Cuisenaire agli sviluppi in serie di Taylor-MacLaurin, ce n'è per tutti i gusti!

Seguiremo quindi con molta libertà la dimostrazione di Euler, di tanto in tanto sospendendone il flusso per segnalare alcune idee possibili per il lavoro in classe. Mossi dallo stesso interessa all'applicazione didattica, ci siamo presi anche la licenza di deviare in un punto dal metodo originale di Euler, molto algebrico, seguendone uno più visivo e combinatorio.

Infine varrà anche la pena di sbirciare nella corrispondenza di Euler, per vedere i suoi dubbi, le sue precauzioni e la sua crescente destrezza nel maneggiare le serie (formali) di potenze, che lui usa già come funzioni generatrici, consegnando così ai posteri quello che è oggi uno strumento fondamentale dell'analisi combinatoria. Vedremo infatti che la preoccupazione più grande di Euler non fu quella di convincersi della validitè del suo risultato, ma di riuscire a trovare un argomento rigoroso per mostrare l'uguaglianza di due serie formali infinite senza fermarsi all'*induzione*, pur protratta abbastanza a lungo da non lasciare nessun dubbio.

Si può quindi ben dire che Euler, nelle serie di potenze che utilizzava con tanta frequenza, badava forse meno ai sommandi scritti davanti a se che a quelli che doveva per forza riassumere nel simbolo "&c."

1. La domanda

San Pietroburgo, 1740. Preoccupato dall'inquietudine del paese, Euler sta già soppesando l'idea di lasciare la Russia. Lo raggiunge una lettera di Philippe Naudé, un insegnante di un ginnasio di Berlino - guarda caso, proprio la città dove Euler si trasferirà tra meno di un anno. La lettera contiene due domande di carattere enumerativo circa i numeri naturali. Naudé chiede, per ogni numero naturale n, di determinare in quanti modi si possa scomporre n in una somma di al più m numeri interi, per m generico. Inoltre si richiede di determinare tale numero sia nel caso generale, sia specificando che i sommandi siano tutti distinti fra loro.

Euler riduce i due problemi di Naudé alla seguente questione fondamentale.

Domanda: *In quanti modi si può scomporre un numero* $\mathbf{n}$ *in una somma di numeri interi positivi?*

I bastoncini di Cuisenaire

Mezzo secolo fa la domanda sarebbe forse stata concretizzata con i bastoncini di Georges Cuisenaire [4, 18, 19], chiedendo di contare i "trenini" che formano il numero dato n, magari senza distinguere trenini che differiscono solo per la "direzione di marcia", oppure ancora di vedere quali sono le scomposizioni di n in tre numeri che possano essere lati di un triangolo...

5-8 anni

2. La risposta di Euler

Malgrado l'apparenza inoffensiva della domanda di Naudé, essa occupò Euler a più riprese prima che egli, dopo 10 anni di tentativi e perfezionamenti, pubblicasse il risultato delle sue ricerche nell'articolo *de partitione numerorum* [11]. Questo tema sarà poi la materia per l'omonimo capitolo XVI dell'*Introductio in analysin infinitorum* [7].

Vediamo qui che Euler chiama "*partitio*" una scomposizione di un numero in una somma di numeri interi positivi. In realtà quindi si tratta di una "partizione" di una collezione di elementi identici. Siccome questo è troppo diverso dall'uso comune odierno della parola riferito agli insiemi, preferiamo d'ora in avanti parlare di *ripartizioni* di numeri.

2.1. Una somma, un prodotto e una prima soluzione.

L'argomento di Euler comincia ponendo mano alla "cassetta degli attrezzi" matematica che lui stesso aveva approntato durante gli anni. L'arnese che ne estrae è l'uguaglianza

$$\frac{1}{1-x^k} = 1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + x^{4k} + \&\text{c.} = \sum_{i\in\mathbb{N}} x^{ik}.$$

Sviluppi in serie... o forse no

È una formula che al liceo si incontra studiando gli sviluppi in serie di Taylor-MacLaurin.
Ma, seguendo un suggerimento di Polyà, si può ricavare la stessa formula anche provando ad eseguire la divisione di polinomi "$1/(1-x)$", avendo cura di scrivere il divisore in ordine di esponenti crescenti. In tal modo tra l'altro l'algoritmo della divisione fornisce anche ad ogni passo il *resto* - ovvero la stima dell'errore.
E, in più, tutto ciò ricorda anche i numeri decimali periodici...

13-16 anni

Questo sviluppo è la base per calcolare il prodotto

$$\prod_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{1-x^k},$$

che quindi per Euler diventa

$$(1+x+x^2+\&\text{c.})(1+x^2+x^4+\&\text{c.})(1+x^3+x^6+\&\text{c.})\&\text{c.}$$

Svolgendo la moltiplicazione *si vede* che c'è un modo solo per ottenere un termine di grado zero (che sarà quindi 1), un modo solo per ottenerne uno di primo grado (che sarà quindi x), ma due modi per ottenere x^2 (il termine di secondo grado sarà quindi $2x^2$).

Insomma, il coefficiente di x^n corrisponde al numero di modi diversi di scrivere n come somma $k_1+2k_2+3k_3+\&\text{c.}$ con tutti i $k_i \geq 0$. Ogni somma del genere può essere riletta come una ripartizione di n:

$$n = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{k_1 \text{ volte}} + \underbrace{2+2+\ldots+2}_{k_2 \text{ volte}} + \ldots + \underbrace{l+l+\ldots+l}_{k_l \text{ volte}} + \&\text{c.}$$

Il trenino di Cuisenaire comincerebbe in questo caso con k_1 vagoni unitari (bianchi), seguiti da k_2 vagoni di lunghezza due (rossi), e così via. Ogni ripartizione del numero n può essere effettivamente scritta in questo modo "ordinato" - ovvero raggruppando i sommandi 1, poi i 2 e così via.

In questo modo, e chiamando $R(n)$ il numero delle ripartizioni di n, Euler ottiene

$$\prod_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{1-x^k} = \sum_{n\in\mathbb{N}} R(n)x^n.$$

Oggi diremmo che aveva scoperto la *funzione generatrice* dei numeri $R(n)$, e quindi in principio risolto il problema. Resta, per conoscere esplicitamente il valore dei numeri $R(n)$, da svolgere il prodotto...

2.2. **Un'idea "ricorsiva".** Euler cerca di rendere più efficiente il suo risultato cercando un'espressione ricorsiva che renda più agevole il calcolo dei numeri $R(n)$.

L'idea è di basarsi sulla "evidente" identità

$$\prod_{k\in\mathbb{N}} (1-x^k) \prod_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{1-x^k} = 1 \qquad (1)$$

e di sfruttare l'osservazione seguente: quando due *serie formali di potenze*

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \&\text{c.} \quad \text{e} \quad B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \&\text{c.}$$

soddisfano

$$A(x)B(x) = 1,$$

allora i coefficienti dell'una si possono ricavare ricorsivamente da quelli dell'altra. Infatti, espandendo il prodotto e tenendo conto del fatto che a destra non vi sono termini di grado strettamente positivo si ottiene

$$\begin{gathered} a_0 b_0 = 1, \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0, \\ \dots \\ a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = 0. \end{gathered}$$

Supponendo per esempio i coefficienti di $A(x)$ noti, si può risolvere la k-esima riga in funzione di b_{k+1} e sostituire le righe precedenti per gli altri coefficienti b_i: in tal modo i b_k sono determinati ricorsivamente.

Naturalmente per utilizzare quest'idea Euler deve ancora scoprire i coefficienti del prodotto $\prod_{k\in\mathbb{N}}(1-x^k)$. In altre parole, si tratta di determinare i numeri $q(n)$ tali che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} q(n)x^n = \prod_{k\in\mathbb{N}}(1-x^k).$$

Questa è forse la parte che più ha tediato Euler: sebbene ne avesse "indovinato" la soluzione calcolandone molti termini, nella sua corrispondenza con diversi altri matematici (si veda [3]) riconosceva (e si lamentava) di non averne una dimostrazione sufficientemente rigorosa (vedi la nostra sezione 3). Infine, in una lettera diretta a Golberg [9] espone una dimostrazione rigorosa della sua soluzione.

Il metodo seguito da Euler è un susseguirsi di acrobazie algebriche e di sostituzioni che conduce infine al risultato sperato.

2.3. **Un'idea combinatoria.** Come direbbe Euler, *"aggrediamur ergo hanc primum quaestionem"* [11, par. 8].

Dapprima proviamo ad espandere il prodotto in questione, e cioè

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\&\text{c.}.$$

Anche qui c'è un modo solo per ottenere termini di grado zero - ovvero scegliendo il fattore '1' in ogni parentesi: $q(0) = 1$. Nello stesso modo si vede anche che $q(1) = q(2) = -1$. Il primo caso interessante è quello dell'esponente 3. I sommandi del termine di terzo grado sono: $-x^3$ ('usando' solo la terza parentesi) e $(-x^2)(-x) = +x^3$ (usando le prime due): quindi $q(3) = 0$.

Ogni termine è ottenuto moltiplicando unità o potenze *diverse* di x. In generale abbiamo quindi che $q(n)$ si ottiene considerando le ripartizioni di n in parti *diverse* (... ma non è la seconda parte del problema di Naudé? Che egli ne avesse intuito l'interesse?). Ogni ripartizione con un numero pari di parti contribuisce con $+1$ al valore di $q(n)$, le altre con -1.

Malgrado la citazione originale che apre il paragrafo, ci allontaniamo ora come annunciato dal metodo usato da Euler per illustrare una tecnica più "visiva" che permette di ottenere lo stesso risultato.

Utilizziamo un artificio schematico per rappresentare le ripartizioni. Per ogni addendo della ripartizione disegnamo una "barra" orizzontale con un numero corrispondente di quadretti, disponendo le rigne più lunghe in alto e allineando le righe a sinistra.

I diagrammi così ottenuti sono detti comunemente *diagrammi di Ferrers*, in omaggio a Norman McLeod Ferrers (1829-1903), che però non li usò mai nelle sue pubblicazioni. Infatti la paternità di queste rappresentazioni gli fu attribuita da J. J. Sylvester in [16], citando una comunicazione personale di Ferrers. Curiosamente, Sylvester annota a margine che Ferrers stesso diceva di aver scoperto questi diagrammi nella soluzione di un esame consegnata da uno studente di nome John C. Adams a Cambridge nel 1847 [14]. L'uso di questi diagrammi per studiare il prodotto notevole che ci interessa è dovuto però ad un matematico americano, F. Franklin, che nel 1881 pubblicò una nota dedicata esclusivamente a questo argomento [13]. Oggi questi diagrammi sono uno strumento tipico nello studio delle ripartizioni.

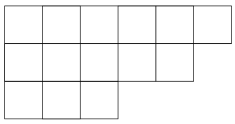


Figura 1. Il diagramma di Ferrers della ripartizione $14 = 6 + 5 + 3$.

I diagrammi di Ferrers delle ripartizioni che ci interessano per calcolare i $q(n)$ si distinguono per non avere mai due righe della stessa lunghezza.

L'idea chiave è ora di cercare di *appaiare i diagrammi delle ripartizioni in parti distinte, in modo che in ogni paio ce ne sia una con un numero pari e un'altra con un numero dispari di parti.* Per tutti i numeri n che permettono questo appaiamento avremo $q(n) = 0$, mentre per gli altri dovremo contare quante ripartizioni 'avanzano'.

Ecco come si fa. Consideriamo il diagramma di una ripartizione in parti distinte e evidenziamo l'ultima riga e la diagonale che scende "a 45 gradi" dall'ultimo elemento in alto a destra, come nella figura.

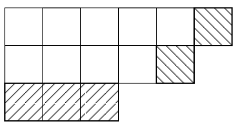


Figura 2

Se la diagonale è più corta dell'ultima riga, si spostano i quadratini della diagonale in modo da formare una nuova ultima riga. Nel caso contrario si spostano i quadretti dell'ultima riga aggiungendoli alle prime righe, uno per

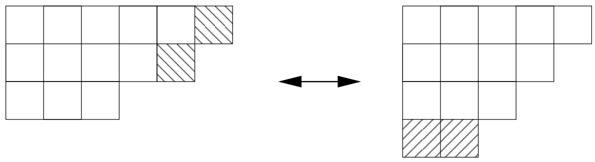


FIGURA 3

riga, in modo da creare una nuova diagonale. Un disegno vale più di mille parole:

Siccome il numero di righe aumenta o diminuisce di uno, queste operazioni cambiano la parità del numero di parti della ripartizione. Il punto è che applicando due volte questa operazione si ritorna al diagramma di partenza: ecco quindi l'"appaiamento" desiderato!

Le ripartizioni che restano spaiate sono quelle cui non si possono applicare le due operazioni - ovvero, quelle da cui con le trasformazioni indicate non si ottiene più una ripartizione in parti distinte. Questo avviene quando la lunghezza dell'ultima riga eguaglia o supera di un'unità la lunghezza della diagonale.

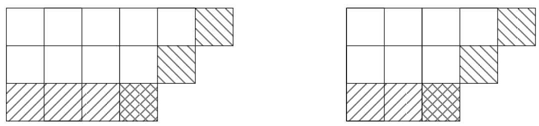


FIGURA 4. Le due configurazioni "eccezionali" possibili per un diagramma a 3 righe.

Dato n, al più una di queste configurazioni può apparire. Sappiamo quindi già che $q(n)$ assume solo i valori $-1, +1$ e 0. Dobbiamo ora capire quali n ammettono le configurazioni "eccezionali", e come determinarne la "parità".

2.4. **Numeri poligonali.** Anche noi adesso mettiamo mano alla nostra scatola degli attrezzi: ricordiamo che i numeri poligonali sono quelli che si possono rappresentare arrangiando degli elementi (di solito, dei pallini) in forme, appunto, poligonali "regolari". Ecco per esempio i primi 4 numeri triangolari e i primi 4 numeri quadrati.

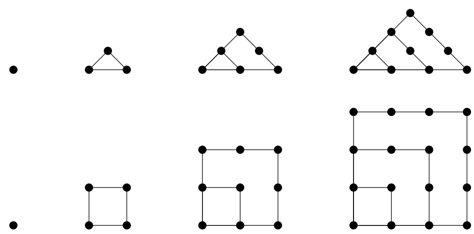


FIGURA 5

Ora vediamo bene che in ogni configurazione eccezionale il numero n deve essere la somma di un numero quadrato e un numero triangolare, come illustriamo nella figura 6.

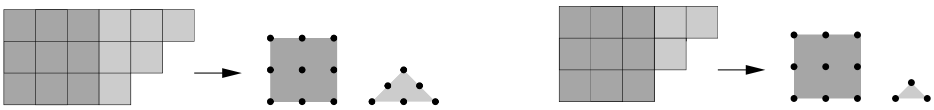


Figura 6. La metamorfosi delle configurazioni “eccezionali”.

Ora, scomposto così il diagramma, possiamo provare a deformare il quadrato in un rombo finchè il lato verticale diventi parallelo a quello del triangolino. Si vede che in entrambi i possibili casi eccezionali tre coppie rombo-triangolo possono essere assemblate a formare un triangolo grande (figura 7).

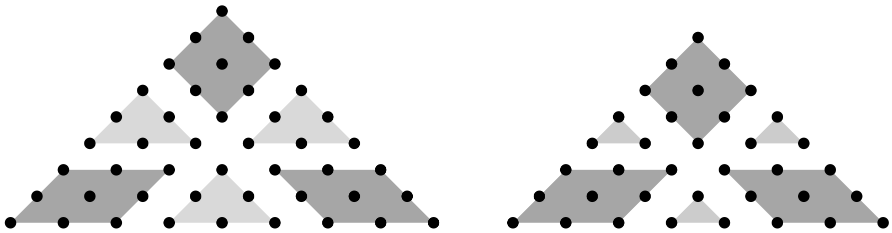


Figura 7. Ogni configurazione eccezionale è un terzo di un numero triangolare.

Inversamente, per ragioni di simmetria si vede che un numero triangolare è divisibile per 3 solo se il baricentro del triangolo non è occupato da un elemento (figura 8). E tra l'altro, se il baricentro è “libero”, i tre elementi più vicini ad esso possono essere disposti come un triangolino con la punta in alto (che unirà i tre rombi) o con la punta in basso (e allora il triangolino unirà i tre triangoli).

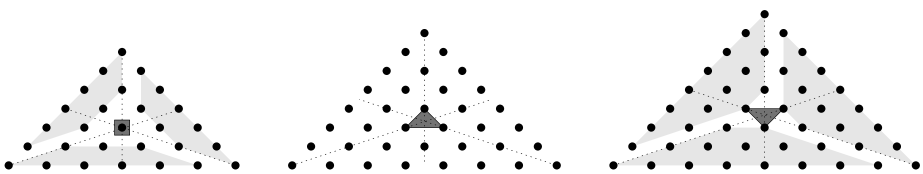


Figura 8. Tripartizione di un numero triangolare.

Insomma, $q(n) \neq 0$ quando n è pari ad un terzo di un numero triangolare.

Resta da risolvere la questione del segno, ovvero della parità del numero delle parti (che è il numero di righe nel diagramma). Abbiamo visto che, fissato il numero delle parti (chiamiamolo k), ci sono esattamente due “configurazioni eccezionali” possibili (figura 4). Esse danno adito a due numeri triangolari consecutivi (uno di lato $k+(k-1)+k$ e uno di lato $k+k+k$) che si ottengono usando gli stessi rombi e aggiungendo una riga di k elementi ad ognuno dei triangolini (figura 9).

Ovviamente, se k è pari, la differenza tra i due numeri triangolari consecutivi è pari, e viceversa. Notiamo pure che il numero triangolare che segue

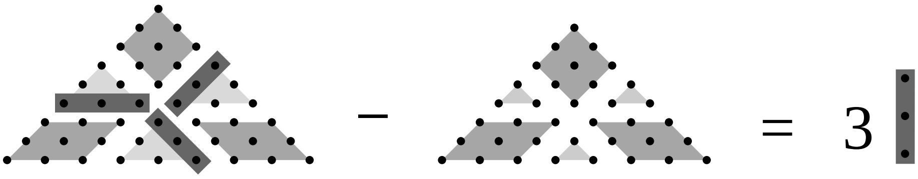


FIGURA 9. La differenza tra due numeri triangolari multipli di 3 consecutivi.

o precede ognuna di queste coppie *non* può essere multiplo di 3 (ha il baricentro "occupato"!).

Ecco quindi che i numeri triangolari multipli di 3 si presentano naturalmente a coppie, e possiamo dire che: $q(n) = 1$ *se* $3n$ *è un numero triangolare che fa parte di una coppia con uguale parità,* $q(n) = -1$ *se* $3n$ *fa parte di una coppia di numeri triangolari con parità diverse, e* $q(n) = 0$ *altrimenti.*

2.5. **La sorpresa.** Proprio per come è disegnato, il numero triangolare di lato l è uguale alla somma dei numeri interi da 1 a l.

Ricordando la formula per la somma delle successioni aritmetiche e la lunghezza del lato dei numeri triangolari associati alle configurazioni eccezionali con k righe otteniamo i valori

$$T_a(k) = \frac{3k(3k-1)}{2}, \quad T_b(k) = \frac{3k(3k+1)}{2}$$

per la coppia di numeri triangolari associata. Siccome $T_a(-k) = T_b(k)$, possiamo economizzare la notazione e scrivere semplicemente $P(k) := T_a(k)$, cosicchè automaticamente $T_b(k) = P(-k)$.

Il risultato che Euler trovò per via algebrica fu infatti

$$q(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{se } n = P(k) \text{ per un } k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{2}$$

Euler non nasconde la sua meraviglia nel ritrovare qui i *numeri pentagonali* di Diofanto, seppur nella loro forma cosiddetta "generalizzata". Per ottenere i numeri pentagonali *strictu sensu* dobbiamo supporre $k > 0$: in tal caso $P(k)$ è esattamente la forma generale dei numeri che si ottengono disponendo gli elementi su dei pentagoni di lato crescente.

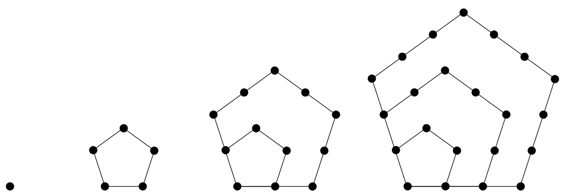


FIGURA 10. I numeri pentagonali, da $P(1)$ a $P(4)$.

Per noi, abituati a giocare con rombi, quadrati e triangoli, la cosa non desta particolare sorpresa. Senza sprofondare nelle formule, consideriamo le configurazioni eccezionali dove il lato del triangolo è minore di quello del quadrato. Vediamo che passando da una tale configurazione 'alla prossima' il numero totale di elementi incrementa di tre volte il lato del triangolo più un'unità, e il paragone con l'incremento tra un numero pentagonale e l'altro è presto fatto!

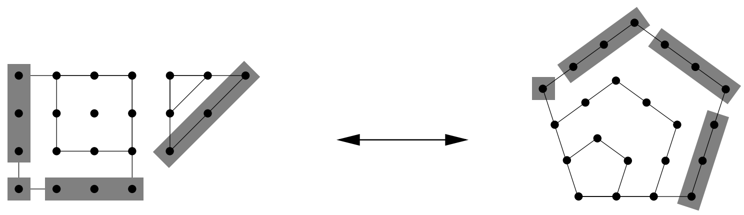
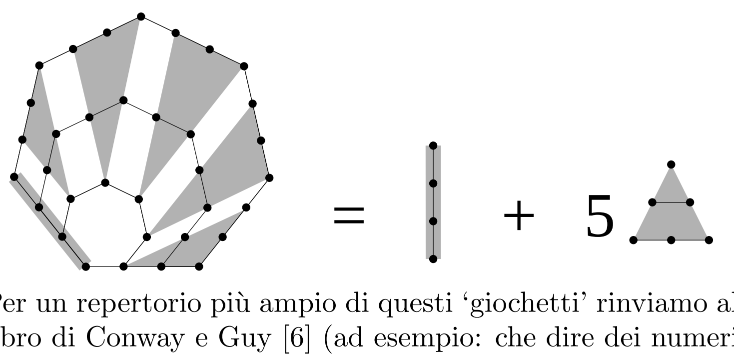


Figura 11. L'incremento dei numeri pentagonali confrontato con l'incremento tra due configurazioni eccezionali con "triangoli piccoli".

Se questa sarabanda di figure, numeri e diagrammi vi ha fatto girare la testa, confrontatela con Euler [11, 7, 3]... e vedrete!

Numeri figurati

Un *numero figurato* è un numero che può essere rappresentato con una disposizione geometrica 'regolare' di punti, nel piano o nello spazio.
Il più celebre (e arduo) risultato è forse il fatto che ogni numero naturale può essere espresso come la somma di al più n numeri n-agonali (Gauss per $n = 3$, Lagrange per $n = 4$, Cauchy in generale [5]).
I numeri figurati sono però una miniera di interessanti proprietà 'numerico-geometriche' che si ottengono semplicemente giocando con le figure.
Per esempio, se T_n è l'n-esimo numero triangolare, allora l'n-esimo numero k-gonale è uguale a $n + (k-2)T_{n-1}$. La dimostrazione sta tutta in una figura (dove $k = 7$, $n = 4$):



Per un repertorio più ampio di questi 'giochetti' rinviamo al libro di Conway e Guy [6] (ad esempio: che dire dei numeri 'piramidali' rispetto ai numeri 'tetraedrici'?).

9-12 anni

2.6. **Conclusione.** A questo punto ritorniamo con Euler. Conosciamo infine i coefficienti $q(n)$ di una serie che, moltiplicata per la serie generatrice dei numeri $R(n)$, da' 1. Confrontando come sopra i coefficienti dei termini di grado uguale, e usando i valori ottenuti in (2), Eulero ottiene la seguente ricorsione:

$$\begin{aligned} R(n) &= q(1)R(n-1) + q(2)R(n-2) + \&\text{c.} \\ &= \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ P(k)\leq n}} (-1)^k R(n-P(k)), \end{aligned}$$

che utilizza quindi tutti i pentagonali minori o uguali ad n. Questo tipo di risposta avrebbe però difficilmente entusiasmato il buon Naudé, e quindi Euler conclude compilando una tabella dove nell'm-esima riga, n-esima colonna, troviamo il numero di modi di scomporre n utilizzando solo i numeri $1, 2, \dots, m$ - e all'inizio dell'ultima riga un'altra invenzione di Euler: "∞". Porre $m = \infty$ significa non porre nessuna restrizione alla partizione - nella n colonna dell'ultima riga troviamo quindi $n^{(\infty)}$, ovvero il modo in cui Euler chiama il nostro $R(n)$.

Buona parte di *de partitione numerorum* è in effetti dedicata a sviscerare questa tabella, di cui riportiamo in figura 12 la prima pagina. Euler illustra un vasto repertorio di artifici per ricavare, opportunamente sommando o sottraendo i valori riportati, la soluzione di diverse variazioni del problema delle ripartizioni. In particolare, risponde anche ai due quesiti originali di Naudé.

In ogni caso Euler da moltissima importanza alla praticità di calcolo, e rileva come la tabella in effetti si 'autorigeneri' tramite semplici somme. È ad illustrare questo processo di autoriproduzione che servono i numerini più piccoli scritti in alto a certi campi della tabella. Vogliamo illustrare brevemente come.

Si nota subito che la sequenza orizzontale di numerini della m-esima riga riproduce la sequenza dei numeri principali della stessa riga, ma è 'spostata a destra' di m posti. Euler sta sfruttando il fatto che

$$n^{(m)} = n^{(m-1)} + (n-m)^{(m)}.$$

Una ripartizione di n in parti non superiori a m può essere infatti solo di due tipi: o nessuna parte vale effettivamente m (e tutte queste sono contate dal primo sommando), oppure almeno una parte è uguale a m. Queste ultime ripartizioni di n con una parte uguale a m sono esattamente tante quante le ripartizioni di $(n-m)$ in parti non superiori ad m - e di queste ce ne sono appunto $(n-m)^{(m)}$.

Una volta scritti i primi m termini della riga m (che sono, tra l'altro, necessariamente uguali a quelli della riga superiore), Euler li trascrive, spostati, come numerini piccoli. Egli ottiene quindi il numero 'grosso' di ogni campo sommando il numerino che ha già messo in quel campo ($(n-m)^{(m)}$) con il numero 'grosso' del campo appena sopra ($n^{(m-1)}$).

Qualcuno si sarà già chiesto a cosa corrispondono i numerini nell'*ultima* riga, quella con $m = \infty$. Chiaramente il ragionamento non funziona più - ma si vede che, di nuovo, i numerini dell'ultima riga sono l'incremento tra i numeri delle ultime due righe (... anche lungo le ulteriori 4 pagine della tabella [11, pp. 166-169]). Il fatto è che Euler riesce a esprimere anche questi incrementi tramite i valori della tabella già costruita: con tale

Tabula indicans, quot variis modis quilibet numerus n ex numeris 1, 2, 3, 4, - - - - m per additionem produci possit, seu exhibens valores formulae $n^{(m)}$.

Num. m.	Valores numeri n. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12
3	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30	33	37	40	44	48	52
4	1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64	72	84	94	108	120	136
5	1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	37	47	57	70	84	101	119	141	164	192	221	255
6	1	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35	44	58	71	90	110	136	163	199	235	282	331	391
7	1	1	2	3	5	7	11	15	21	28	38	49	65	82	105	131	164	201	248	300	364	436	522
8	1	1	2	3	5	7	11	15	22	29	40	52	70	89	116	146	186	230	288	352	434	525	638
9	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	41	54	73	94	123	157	201	252	318	393	488	598	732
10	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	55	75	97	128	164	212	267	340	423	530	653	807
11	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	76	99	131	169	219	278	355	445	560	695	863
12	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	100	133	172	224	285	366	460	582	725	905
13	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	134	174	227	290	373	471	597	747	935
14	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	175	229	293	378	478	608	762	957
15	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	230	295	381	483	615	773	972
16	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	296	383	486	620	780	983
17	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	384	488	623	785	990
18	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	489	625	788	995
19	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	626	790	998
20	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627	791	1000
∞	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627	792	1002

X 3 m, 23

FIGURA 12. Pagina 165 di [11]. Euler calcola tutti i valori fino a $n = 59$ (corrispondenti a altre 4 pagine di tabella), ovvero fino a $R(59) = 59^{(\infty)} = 831820$(!)

metodo, avendo a disposizione i valori fino a $m = 20$ Euler mostra di essere in grado di calcolare velocemente $n^{(\infty)}$ fino a un n *"valde magnus"* [11, §43]. Ma questa è un'altra storia, nella quale adesso non conviene addentrarsi: la si può trovare in [11, §42 e segg.].

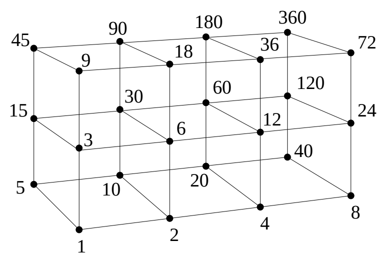
Anche dopo risposto completamente alla domanda di Naudé, Euler ebbe occasione di sfruttare ancora questi risultati. Ad esempio in un articolo dal titolo *Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum* [10]. È questa, stando a Bell [3], la prima volta che Euler pubblica la dimostrazione del 'teorema dei numeri pentagonali' dopo che l'aveva comunicata privatamente a Goldbach [9].

In questo lavoro Euler ritrova i numeri pentagonali in una formula ricorsiva per determinare la somma $S(n)$ dei divisori di un numero naturale - tra l'altro *senza doverlo scomporre in fattori!*. Il prezzo per poter riscrivere la sua cara ricorsione pentagonale anche per $S(n)$ è il dover porre "d'ufficio" la somma dei divisori di 0 uguale ad n, secondo il caso [3, Sezione 4], [12, Par. 4].

Diagrammi di Hasse

Quando la scomposizione in fattori primi $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ del numero in questione è disponibile, con i diagrammi di Hasse (ovvero considerando il 'reticolo dei divisori', come nell'esempio per $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$) si può provare a dimostrare che per la somma dei divisori di n vale

$$\sum_{d|n} d = \left(\frac{a^{\alpha+1} - 1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b-1} \&\text{c.} \right).$$



E che dire, più semplicemente ancora, del *numero* e del *prodotto* dei divisori di n?

15-17 anni

3. I dubbi di Euler

Il lungo lasso di tempo trascorso dalla domanda originale di Naudé alla risposta "definitiva" di Euler [11] è dovuto alla circospezione del matematico e al suo disagio nel manipolare serie o prodotti infiniti, insomma le espressioni che lui terminava con &c., principalmente a causa dei problemi legati all'induzione.

In particolare per quanto riguarda il teorema di cui ci occupiamo, Euler credeva già da molto tempo almeno che $q(n)$ fosse diverso da 0 solo per i numeri $\frac{k(3k\pm1)}{2}$, e giustificava questo fatto con l'aver sviluppato il prodotto per *così* tanti termini che non poteva più sussistere nessun ragionevole dubbio - dice: "..., habe ich auch nur per inductionem geschlossen, welche ich zwar so weit fortgesetzt, dass ich die Sach für völlig wahr halten kann; allein ich wäre sehr begierig davon eine demonstrationem directam zu sehen,..." [8].

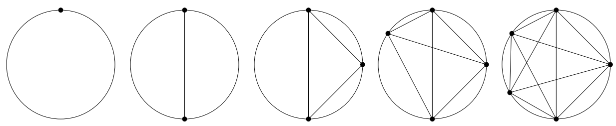
Infatti Euler non cessa di menzionare il teorema dei numeri pentagonali nelle sue corrispondenze, manifestando la sua insoddisfazione per non avere una prova rigorosa dell'enunciato, e chiedendo all'interlocutore di turno (Goldbach, Daniel I Bernoulli, Niklaus I Bernoulli, d'Alembert [3, Sezione 2]) che vi si dedicasse e provasse a risolvere il problema. Ma da queste lettere non scaturiscono risultati utili - e d'Alembert addirittura si arrende dicendo *"Au reste personne n'est plus profond et plus versé sur ces matières que vous"* [1].

Au reste, è lo stesso Euler che riesce a dimostrare il teorema argomentando per ricorsione. La prima stesura di questa dimostrazione, come detto, sembra essere in una lettera del 1747 a Goldbach ([3, sezione 3],[9]).

3.1. **E perchè no?** Riguardo alla diffidenza verso l'"induzione", una precisazione dei termini si impone. Naturalmente Euler intende induzione in senso propriamente logico: a partire da un numero di casi finito *indurre* appunto una regola generale. Non si intende qui il metodo di dimostrazione rigoroso che si ancora ad un caso iniziale e procede mostrando la validità dell'enunciato per il successore di ogni numero per cui esso sia già provato. Tale tecnica è propriamente chiamata *ricorsiva.*

Un tranello induttivo

Un problema utile per illustrare i tranelli dell'induzione è quello di determinare il numero r_n di regioni determinate all'interno di un cerchio dalle corde tese tra n punti in posizione generica sulla circonferenza.
I primi termini della successione sono i seguenti.



$$r_1 = 1, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 4, \quad r_4 = 8, \quad r_5 = 16.$$

Da questi valori si è condotti ad indurre un principio che si rivelerà arduo da dimostrare... infatti il sesto termine della successione è $r_6 = 31$ (provare per credere)! E allora diventa tanto più stuzzicante il cercare, e dimostrare, la formula corretta.

15-17 anni

3.2. **Oggi: serie formali di potenze.** Abbiamo visto come Euler usi quelle che noi oggi chiameremmo *funzioni generatrici* per determinare i numeri $q(n)$ - ovvero, cerca lo "sviluppo in serie" di un'ipotetica funzione dove il coefficiente di x^n sia esattamente $q(n)$. Sebbene all'inizio queste serie infinite provengono da sviluppi "onesti" (per esempio quello di $\frac{1}{1-x}$), esse non sono assolutamente trattate come oggetti analitici. Euler si serve di questi "polinomi infiniti" semplicemente come oggetti combinatori per manipolare liste infinite di numeri - esattamente come oggi si usa una funziona generatrice che, per dirla con Wilf, "*is a clothesline on which we hang up a sequence of numbers for display*" [17, p. 1]. Il problema diventa spinoso quando si pretende *comunque* di maneggiare queste serie come oggetti algebrici - scrivendo quindi uguaglianze come la (1), che sta alla base dell'argomento di Euler. Era anche questa consapevolezza a rendere Euler particolarmente timido nell'esporre il suo ragionamento.

Oggi la questione è sistemata dalla teoria delle *serie formali di potenze*, dove si precisano le regole di calcolo e si introduce una nozione di 'convergenza formale' per queste serie. A chi fosse interessato a saperne di più segnaliamo alcune referenze: Guinot [15] spiega lo stretto necessario per rendere rigoroso l'argomento di Euler, mentre Wilf [17] tratta il tema dal punto vista delle funzioni generatrici. Concludiamo segnalando il recente articolo di Andrews [2] che mostra come Euler, indagando altri tipi di ripartizioni, avesse già utilizzato delle serie di Laurent formali - ammettendo quindi anche esponenti negativi, e trattando con espressioni che in senso analitico non convergono per *nessun* valore della variabile!

Referenze

Osservazione: I testi originali di Euler sono liberamente disponibili in rete sul sito dell'università di Dartmouth.
Per le pubblicazioni scientifiche, divise per argomento e classificate con l'"indice Eneström" (della forma Exyz), si veda `http://www.math.dartmouth.edu/ euler/publications/`.
I carteggi di Euler sono invece catalogati per nome del corrispondente e con un codice di 5 caratteri (OOxyz). Si veda `http://www.math.dartmouth.edu/ euler/correspondence/`.

[1] J. L.-R. d'Alembert; lettera a Euler del 20 gennaio 1748. (Lettera n. 12 del carteggio Euler-d'Alembert, 0024). Leonhardi Euleri Opera Omnia, Ser. IV, vol. 5, pp.276-278, Birkhäuser, Basel.

[2] G. Andrews; *Euler's "De Partitio Numerorum"* [sic].Bull. Amer. Math. Soc. 44 (2007), 561-573.

[3] J. Bell; *Euler and the pentagonal number theorem.* Arxiv:math/0510054.

[4] G. Cuisenaire, C. Gattegno; *Les nombres en couleurs.* Delachaux et Niestle, Neuchâtel, 1956.

[5] A. L. Cauchy; *Démonstration du théorème général de Fermat sur les nombres polygones.* In Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy, Vol. VI (II Srie), pp. 320-353. Gauthier-Villars, Paris 1905.

[6] J. H. Conway, R. K. Guy; *The Book of Numbers.* Springer-Verlag, New York, 1996.

[7] L. Euler; *Introductio in analysin infinitorum* (E 101). Ristampa anastatica della traduzione di Lagrange: ACL-Éditions, Paris, 1987.

[8] L. Euler; lettera a Goldbach del 6 maggio 1747 (lettera n. 115 del carteggio Euler-Goldbach, OO829)

[9] L. Euler; lettera a Goldbach del 9 giugno 1750 (Lettera n. 144 del carteggio Euler-Goldbach, OO858).

[10] L. Euler; *Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum.* (E244) Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, Volume 5 (1760), pp. 75-83

[11] L. Euler; *De partitione numerorum.* (E 191) Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Volume 3 (1753), pp. 125-169.

[12] L. Euler; *De mirabilibus proprietatibus numerorum pentagonalium.* (E542) Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae, Volume I (1780) pp. 56-76.

[13] F. Franklin; *Sur le développement du produit infini* $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)$. C. R. Acad. Sci. Paris, **92** (1881), pp. 448-450.

[14] C. Kimberling; *The origin of Ferrers graphs.* The Mathematical Gazette, vol. 83, **497** (1999), pp. 194-198.

[15] M. Guinot; *Ce diable d'homme d'Euler.* Aléas, Lyon, 1994.

[16] J. J. Sylvester; *On Mr. Cayley's impromptu demonstration of the rule for determining at sight the degree of any symmetrical function of the roots of an equation expressed in terns of the coefficients.* Philosophical Magazine **5** (1853) pp. 199-202.

[17] H. Wilf; *Generatingfunctionology,* 2^a edizione. Academic Press, New York, 1994. In rete: `http://www.math.upenn.edu/~wilf/gfology2.pdf`

[18] `http://en.wikipedia.org/wiki/Cuisenaire_ rods`

[19] `http://teachertech.rice.edu/Participants/silha/Lessons/cuisen2.html`